HÖJDPUNKTEN 2023

Öppen tävling den 11 mars 2023

Skrivtid: 3 timmar
Hjälpmedel: Endast penna, sudd, passare och linjal
Motivera alla lösningar, enbart svar ger inga pöang om inte annat anges.

Problem 1. Låt M vara mängden av ändliga listor bestående av enbart talen $-1, 0$ och 1. Vi säger att en funktion $F : M \to \{-1, 0, 1\}$ är *majestätisk* om den uppfyller:

(a) $F(x) = F(y)$ om listan y är en permutation av listan x.

(b) $F(x) = -F(y)$ om listan y består av negationerna av talen i listan x.

(c) om $F(x) \in \{0, 1\}$ och vi bildar listan y genom att öka något tal i listan x, så är $F(y) = 1$.

Bestäm alla majestätiska funktioner.

Problem 2. I en stad bor Sofia och några av hennes vänner. Staden består av $n > 1$ parker och ett antal gator som förbinder par av parker. Det tar en minut att cykla längs en gata mellan de två parkerna som gatan förbinder. Dessutom går det att cykla från vilken park som helst till vilken annan park som helst genom att bara använda dessa gator. Sofias vänner som bor i staden bor alla vid en park som bara har en gata som förbinder parken till en annan park. Inga två av Sofias vänner bor heller vid samma park. Nu vill Sofia anordna en picknick i en av parkerna för alla hennes vänner i staden, så att den sammanlagda tiden det tar för alla Sofias vänner att cykla till parken är som mest $\frac{(n+1)^2}{8}$. Visa att detta är möjligt.

Problem 3. Polynomet $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 190x + 128$ har fyra positiva rötter. Vi ritar en cyklisk fyrhörning med rötterna som sidlängder (det är givet att detta är möjligt). Vad är dess area?

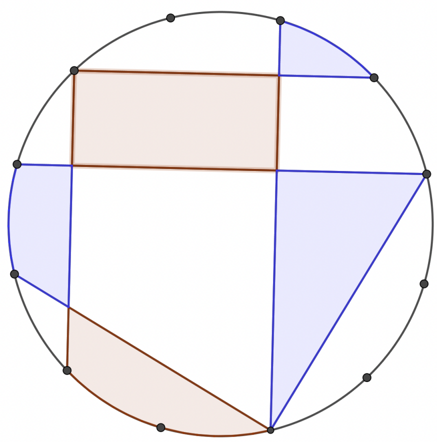
Problem 4. Bestäm alla funktioner $f : \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{Z}^+$ så att

$$\phi(2mf(n)) = f(\phi(2n)m)$$

för alla positiva heltal m och $n \neq 1$. Notera att ϕ är Eulers fi-funktion.

Problem 5. Låt heltalen vara färglagda med oändligt många färger. Vi säger att en rationell $(m \times n)-$matris A är *intressant* om det för varje $i = 1, 2, ..., n$ existerar en lösning till $Ax = 0$ sådan att $x_i \neq 0$. Vidare säger vi att A är *bra för färgen* c, om $Ax = 0$ har en lösning $x \in \mathbb{Z}^n$ sådan att alla x_i har färgen c. Är det möjligt att alla intressanta matriser är bra för alla (oändligt många) färger?

Problem 6. Bevisa att summan av areorna av de blå områdena är samma som summan av areorna av de röda områdena. Figuren är en cirkel och punkterna på omkretsen är jämnt utspridda.



Problem 7. Bestäm det minsta positiva heltalet n sådant att om talen $404, 405, ..., n$ delas in i två grupper så finns alltid tre olika tal x, y, z som är i samma grupp sådana att $x + y = z$?

Problem 8. Säg att ett rationellt tal är *trevligt* om det kan skrivas på formen $\frac{k+1}{k}$ för något positivt heltal k. Givet $n \in \mathbb{N}$, existerar det alltid en sekvens med n rationella tal $q_1, ..., q_n$ sådana att $q_i q_{i+1} ... q_j$ är ett trevligt tal för alla $1 \leq i \leq j \leq n$?

Problem 9. Låt $\alpha > 1$ vara ett irrationellt tal och låt n vara ett positivt heltal. Betrakta mängden

$$S = \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, ...\}.$$

Visa att det existerar ett heltal M sådant att S inte innehåller någon aritmetisk talföljd av längd M, där intilligande element har differens n.

Problem 10. Låt $\triangle PQR$ vara en triangel, och låt dess inskrivna cirkel ω tangera sidorna i punkterna A, B respektive C (där A ligger på sidan PQ, B på sidan PR och C på sidan QR). Låt X vara mittpunkten på cirkelbågen BC som inte innehåller A. Låt linjerna PX och QX skära linjerna AB respektive AC i punkterna M respektive N. Visa att den omskrivna cirkeln till AMN tangerar ω.

Problem 11. Hitta alla positiva heltalslösningar till ekvationen $m^{n+1} = 2^m + n^2$.

Problem 12. Är det sant att det för varje ändlig grupp G existerar en delmängd av $\mathbb{R}^n$ (för något n) vars symmetrigrupp är isomorf med G? *(Symmetrigruppen till en delmängd av $\mathbb{R}^n$ definieras som mängden av isometrier av $\mathbb{R}^n$ som fixerar mängden).*

Problem 13. I landet långt borta pågår en kamp mellan två lag - det röda laget och det blåa laget. Landet består av n stycken städer. Vissa par av städer är hopkopplade med vägar. I början tillhör vägarna inte något av lagen. De turas sen om att välja en väg som inget av lagen hittills valt, och färgar den med sin egen färg. Det röda laget väljer först.
Om det vid något tillfälle är möjligt att längs med endast blåa vägar resa mellan alla par av städer, så vinner det blåa laget. Om alla vägar valts (av något lag) utan att blåa laget har uppnått detta än, så vinner det röda laget.
Visa att det blåa laget kan garantera en vinst om och endast om det går att dela in vägarna i två olika grupper, så att det inom varje grupp går att ta sig mellan varje par av städer.

Problem 14. Givet är ett heltal n. På tavlan står talen $1, 2, 3, ..., n$. Kevin vill välja ut k av dem, och sudda ut resten, på så vis att ingen summa av några tal som är kvar på tavlan är ett potenstal. Vilket är det största tal k han kan göra detta för? *Arrangörerna vet inte svaret, och kommer ge poäng för både övre och undre gränser. Ju bättre gränser ni har asymptotiskt, desto mer poäng!*