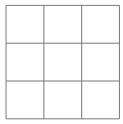
HÖJDPUNKTEN 2023

Högstadietävling den 10-11 mars 2023

Skrivtid: 3 timmar
Hjälpmedel: Endast penna, sudd, passare och linjal
Motivera alla lösningar, enbart svar ger inga pöang om inte annat anges.

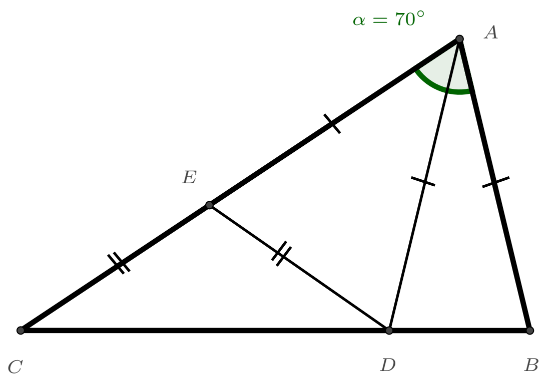
Problem 1. I rutnätet nedan ska siffrorna $1-9$ placeras in så att alla siffror förekommer exakt en gång. Vi vill att summan av siffrorna i varje $2\times 2-$delkvadrat ska vara densamma, oavsett vilken delkvadrat vi väljer (notera att det finns totalt fyra sådana delkvadrater). Vad är det minsta möjliga värdet på denna summa?



Problem 2. I en kruka finns bollar med olika färger. Mer än 61 procent och mindre än 65 procent av bollarna är gröna. Vilket är det minsta möjliga antalet bollar som kan finnas i krukan?

Problem 3. Kalle och Lisa spelar ett spel. Först väljer Kalle ut 4 positiva heltal. Sedan berättar han för Lisa vilka tal han valde. Lisa ska sedan med hjälp av $+, -, \times$ och $\div$ försöka skapa ett tal delbart med 6. Hon får göra uträkningar i vilken ordning hon vill (så hon kan använda sig av parenteser), men får bara använda varje tal en gång. Om hon lyckas vinner hon, annars vinner Kalle. Kan Lisa vinna spelet oavsett vilka tal Kalle väljer?

Problem 4. I triangeln ABC så är vinkeln $\angle BAC = 70°$. På sidan BC väljs en punkt D och på sidan AC väljs en punkt E, så att $|AB| = |AD| = |AE|$. Det visar sig att $|DE| = |EC|$. Bestäm alla vinklar i triangeln ABC.



Problem 5. Det sitter 100 personer i en ring. Vi vet att vissa av dem är lögnare som alltid ljuger, och att vissa av dem är sanningssägare som alltid talar sanning, men vi vet inte vem som är vad. Alla i ringen säger att de sitter bredvid minst en lögnare. Vilket är det minsta och största antal lögnare som kan finnas i ringen?

Problem 6. För ett heltal x så är

$$x^2 = x \cdot x$$

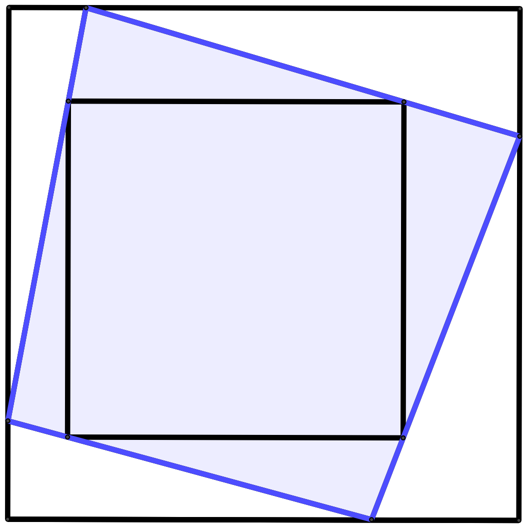
$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

...

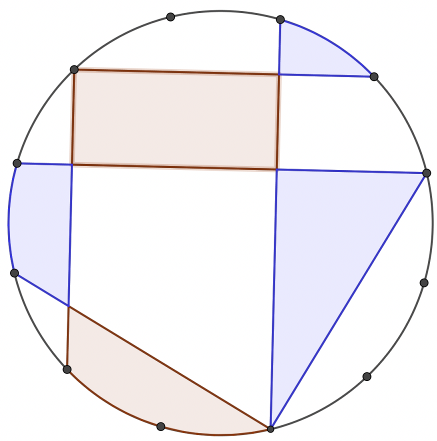
Till exempel så är $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.
Anders tog ett positivt heltal x, och räknade ut att $x^{15} = 4\ 747\ 561\ 509\ 943$. Vad är x?

Problem 7. I figuren syns två kvadrater (svart omkrets) med parallella sidor. Den stora kvadraten har sidlängd 3 och den lilla har sidlängd 2. Vad är arean av den blå skuggade fyrhörningen?



Problem 8. Eleverna i UVS-byn bor i 49 höghus som ligger jämnt utspridda längs med en och samma gata. I det första huset bor 1 elev, i det andra huset bor 2 elever, och så vidare till och med hus nummer 49 där 49 elever bor. När det är dags att organisera en stor mattetävling vill arrangörerna veta i vilket hus de ska hålla tävlingen för att minimera den totala ressträckan för alla eleverna. Vilket hus ska de välja?

Problem 9. Bevisa att summan av areorna av de blå områdena är samma som summan av areorna av de röda områdena. Figuren är en cirkel och punkterna på omkretsen är jämnt utspridda.



Problem 10. På tavlan står talen $1, 2, 3, ..., 1000$. Kevin väljer ut 12 av dem, och suddar ut resten. Därefter noterar han att ingen summa av några tal som är kvar på tavlan är ett potenstal. Är detta möjligt?
Notera: Ett potenstal är ett tal på formen n^k *för heltal* n *och* $k \geq 2$. *Till exempel så är följande tal potenstal:* $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$, $49 = 7 \cdot 7 = 7^2$, $128 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$