Allmän Problemlösning - Tjejlägret 2019

Nicole Hedblom, Lars Åström

Maj 2019

1. På en fest är det $n > 1$ personer. Om person A är vän med person B så är person B vän med person A. Visa att det finns minst två personer som har lika många vänner på festen.
2. Betrakta ett schackbräde där man tar bort det översta vänstra hörnet och det nedersta högra hörnet. Kan du täcka det med dominobrickor?
3. Kan en liksidig triangel med sidan 10 täckas av två liksidiga trianglar med sidan 9?
4. Betrakta en liksidig triangel med sidlängd 2. 5 punkter placeras ut i den. Visa att det finns två punkter som har avstånd ≤ 1 mellan sig.
5. 100 personer ska med ett flygplan. Varje person har en bestämd sittplats på sin biljett och de går på flyget en i taget. Den första personen som går på flyget är lite virrig och vet inte vilken plats som är dennes och sätter sig därför på en slumpmässig plats. För alla andra personer gäller att om deras plats är ledig så sätter de sig på den, annars sätter de sig på en slumpmässig ledig plats. Vad är sannolikheten att den sista personen får sin ursprungliga plats?
6. Vi har ett land med n städer och mellan varje par av städer finns en enkelriktad väg. Visa att det finns en väg som går genom alla städer utan att passera genom någon stad mer än en gång. Visa detta i steg:
   (a) När $n = 2$.
   (b) När $n = 3$.
   (c) Om vi har en lösning för $n = k$, visa att det finns en lösning för $n = k + 1$.
7. Det finns n linjer i planet sådana att inga tre linjer skär varandra i en punkt. Visa att det går att färga alla områden vit och svart så att inga områden med samma färg ligger intill varandra. Visa detta i steg:
   (a) När $n = 1$.
   (b) När $n = 2$.
   (c) Om vi har en lösning för $n = k$, visa att det finns en lösning för $n = k + 1$.
8. Två spelare turas om att ta bort 1, 2 eller 3 brickor från en hög med 20 brickor. Spelare ett börjar att ta. Den som tar den sista brickan vinner. Vem har en vinnande strategi?
9. Ett torn står i det övre vänstra hörnet på ett stort schackbräde av dimensionerna $n \times m$. Alice och Bob spelar ett spel där Alice börjar, de gör varannat drag och i varje drag får de flytta tornet nedåt eller åt höger hur många steg de vill. Vem har en vinnande strategi?
10. Visa att om vi har 100 heltal kommer gå att välja en delmängd av dessa sådan att summan av alla tal i delmängden är delbar med 100.
11. Man startar med talet 2. Därefter turas två spelare om att lägga till en positiv delare till talet som inte är talet självt. Målet är att skriva 2019 (man får ej gå över). Vem har en vinnande strategi?
12. 100 personer står på ett fält och alla avstånd mellan par av personer är olika. Vid en given signal skjuter alla personer med en vattenpistol på den person som står närmast. Visa att det finns två personer som skjuter på varandra.

13. 101 personer står på ett fält och alla avstånd mellan par av personer är olika. Vid en given signal skjuter alla personer med en vattenpistol på den person som står närmast. Visa att det finns minst en person som inte blir skjuten på.

14. Visa att om vi väljer 101 av talen $\{1, 2, \ldots, 200\}$ så kommer det finnas två tal sådana att det ena delar det andra.

15. En schackhäst står i ett rutnät av storlek 5×5. Det är välkänt att hästar som står i rutnät endast kan röra sig genom hoppa två steg i en riktning och ett steg i en riktning vinkelrät mot den första riktningen. Är det möjligt för hästen att besöka alla rutor i rutnätet exakt en gång och sedan återvända till startrutan? Den får inte hoppa utanför brädet.

16. Andrea har ett 10×10-rutnät och 25 stycken T-formade brickor bestående av 4 rutor. Hon tycker om pussel, och kan inte undgå att se hur mycket detta liknar hennes vanliga pussel, med skillnaden att alla bitar är identiska. Är Andreas nya pussel lösbart?

17. Är det möjligt att täcka alla rutor utom mittenrutan i ett 13×13-rutnät med brickor av storlek 1×4? Brickorna får inte överlappa och får inte sticka utanför brädet.

18. En cirkel är uppdelad i 6 st cirkelsektorer. På sektorerna står talen 1, 0, 1, 0, 0 respektive 0. Kan man genom att öka två intilliggande sektorer med 1, upprepade gånger, få det så att det står samma tal i alla cirkelsektorer?

1. Antag att alla har olika många vänner, hur många vänner har varje person då? Fungerar det?
2. Finns det någon naturlig färgning av brädet? Hur många rutor av vardera färg finns då?
3. Hur många hörn i den liksidiga triangeln med sidan 10 kan en av de liksidiga trianglarna med sidan 9 täcka?
4. Rita in fyra liksidiga trianglar i ursprungstriangeln. Kan vi använda dessa på något sätt?
5. Om det bara hade varit två personer, vad hade svaret varit då? Kan man använda det resultatet till att lösa problemet om det var tre personer? Fyra personer?
6. c): Antag att vi har en väg för k städer: $S_1 \to S_2 \to \ldots \to S_k$. Vi ska nu lägga in stad S_{k+1} i denna kedjan. Om det går en kant från S_{k+1} till S_1, vad kan vi göra då? Om det går en kant från S_{k+1} till S_2, vad kan vi göra då?
7. När vi drar en linje, kan vi göra någon förändring kring den linjen så att det fortfarande fungerar?
8. Går det att garantera hur många brickor de två spelarna tar tillsammans?
9. Vem vinner om brädet är 2×2? 2×3? 3×3? 3×5? Mönster?
10. Låt talen vara $x_1, \ldots x_{100}$. Betrakta summorna $s_1 = x_1, s_i = s_{i-1} + x_i$.
11. Hur kommer det se ut i början? Kan någon göra ett val och därefter ”styra” spelet?
12. Kan vi hitta ett par där vi vet att de skjuter på varandra?
13. Vad händer om någon person blir skjuten på av två personer? Försök använda föregående uppgift också.
14. Betrakta mängderna $\{1, 2, 4, 8, \ldots\}$, $\{3, 6, 12, 24, \ldots\}$, $\{5, 10, 20, 40, \ldots\}$, osv. Hur många tal från varje mängd kan vi ta?
15. Kan vi färga brädet på ett bra sätt så att hästen hoppar, med avseende på färgerna, på ett bestämt sätt?
16. Kan vi färglägga brädet på något bra sätt?
17. Kan vi färglägga brädet på något bra sätt?
18. Kan vi hitta något som inte ändrar sig i problemet? Om vi kallar sektorerna för 1,2,3,4,5,6, kan vi då säga något om vilka par vi kan öka med 1?